

31	命題と条件①	制限時間	開始時間	終了時間	合格点
		30 分	■時■分	■時■分	80 点

正しいか正しくないかを定めることが出来る文や式を命題(めいだい)といいます。

命題が正しいとき、その命題は真(しん)であるといい、正しくないとき、その命題は偽(ぎ)であるといいます。

次の文が命題といえるかどうか答えましょう。(3 点×5 問=15 点)

例	富士山は高い。	命題といえない。(比較の対象が分からず、真偽がはっきりしない)
①	日本の人口は1 億人以上である。	
②	1 週間は5 日である。	
③	数学は難しい。	
④	円周率は π である。	
⑤	中学より高校の方が楽しい。	

次の命題の真偽を調べましょう。(4 点×10 問=40 点)

例	1 は素数である。	偽…素数は1 より大きく1 とその数しか約数をもたない整数
①	3 は素数である。	
②	素数は奇数である。	
③	10 は奇数である。	
④	四角形の内角の和は 360° である。	
⑤	ひし形は平行四辺形である。	
⑥	正三角形は二等辺三角形である。	
⑦	$(-1)^3 > 0$	
⑧	実数 a について、 $a^2 \geq 0$	
⑨	$\sqrt{25}$ は無理数である。	
⑩	正三角形 ABC で、 $\angle A = 60^\circ$	

x に値を代入して真偽が定まるものを、 x の条件といいます。

条件に含まれる集合の要素を、その条件の全体集合といいます。

実数 x が次の値をとるとき、命題「 $x \leq 1$ 」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$x=3$	偽… $3 > 1$
①	$x=0$	
②	$x=1$	
③	$x=-\sqrt{3}$	

実数 x が次の値をとるとき、命題「 x は素数である」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$x=0$	偽…素数は1 より大きく1 とその数しか約数をもたない整数
①	$x=9$	
②	$x=-3$	
③	$x=17$	

実数 a 、 b が次の値をとるとき、命題「 $a+b > 0$ 」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$a=1$ 、 $b=0$	真… $1+0 > 0$
①	$a=-1$ 、 $b=0$	
②	$a=3$ 、 $b=-3$	
③	$a=-\sqrt{3}$ 、 $b=\sqrt{5}$	

32 命題と条件②

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

p ならば q のような命題を $p \Rightarrow q$ と表し、 p を仮定、 q を結論といいます。

条件 p の要素を P 、条件 q の要素を Q とすると、 $P \subset Q$ のとき $p \Rightarrow q$ は真、 $P \supset Q$ のとき $p \Rightarrow q$ は偽です。

実数 x について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を使って調べましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$p: x \geq 4$	$q: x \geq 2$	真... $P \subset Q$
①	$p: x \geq 5$	$q: x \geq 1$	
②	$p: x > 1$	$q: x > 2$	
③	$p: x \leq 1$	$q: x \leq 3$	
④	$p: x < -2$	$q: x < -4$	
⑤	$p: x < 0$	$q: x < -1$	

自然数 m について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を使って調べましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$p: m$ は 3 の倍数	$q: m$ は 6 の倍数	偽... $P \supset Q$
①	$p: m$ は 10 の倍数	$q: m$ は 5 の倍数	
②	$p: m$ は偶数	$q: m$ は 4 の倍数	
③	$p: m$ は 6 の約数	$q: m$ は 18 の約数	
④	$p: m$ は 24 の約数	$q: m$ は 8 の約数	
⑤	$p: m$ は 8 の約数	$q: m$ は 16 の約数	

条件を満たさない場合の例を反例(はんれい)といい、命題が偽のとき、反例を 1 つ示します。

実数 x について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を調べ、偽の場合の反例を 1 つ示しましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$	偽 (反例 $x = -4$)
①	$x^2 > 25 \Rightarrow x > 5$	
②	$x = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$	
③	$x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$	
④	$ x \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$	
⑤	$x < 5 \Rightarrow x < 5$	

仮定と結論を入れかえた命題を逆といいます。命題 $p \Rightarrow q$ の逆は $q \Rightarrow p$ です。

実数について、次の命題の逆を答え、その真偽を調べましょう。(4 点×10 問=40 点)

例	$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$	逆は $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$ で真
①	$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$	
②	$x > 2 \Rightarrow x > 0$	
③	$x = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	
④	$x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$	
⑤	$x = 0 \Rightarrow x = 0$	
⑥	$x > 3 \Rightarrow x > 3$	
⑦	$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$	
⑧	$a = b \Rightarrow ac = bc$	
⑨	$a = 0 \Rightarrow ab = 0$	
⑩	$a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$	

33 命題と条件③	制限時間	開始時間	終了時間	合格点
	30 分	■時■分	■時■分	80 点

$p \Rightarrow q$ が偽で $q \Rightarrow p$ が真のとき、 p は q であるための必要条件であるといいます。

$p \Rightarrow q$ が真で $q \Rightarrow p$ が偽のとき、 p は q であるための十分条件であるといいます。

$p \Rightarrow q$ が真で $q \Rightarrow p$ も真のとき、 p は q であるための必要十分条件であるといい、 $p \Leftrightarrow q$ と表します。

実数について、次の命題とその逆の真偽を調べ、() に合う語を書きましょう。(6 点×10 問=60 点)

例	$x \geq 2 \Rightarrow x \geq 0$ 真	$x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ 偽 反例 $x=1$
	よって、 $x \geq 2$ は $x \geq 0$ であるための(十分)条件である。	
①	$x=0 \Rightarrow x^2=0$	$x^2=0 \Rightarrow x=0$
	よって、 $x=0$ は $x^2=0$ であるための()条件である。	
②	$x=1 \Rightarrow x^2=1$	$x^2=1 \Rightarrow x=1$
	よって、 $x=1$ は $x^2=1$ であるための()条件である。	
③	$x=0 \Rightarrow x =0$	$ x =0 \Rightarrow x=0$
	よって、 $x=0$ は $ x =0$ であるための()条件である。	
④	$x < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$	$-1 < x < 1 \Rightarrow x < 2$
	よって、 $x < 2$ は $-1 < x < 1$ であるための()条件である。	
⑤	$x=3 \Rightarrow x^2-6x+9=0$	$x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=3$
	よって、 $x=3$ は $x^2-6x+9=0$ であるための()条件である。	
⑥	$x=-2 \Rightarrow x^2-2x-8=0$	$x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=-2$
	よって、 $x=-2$ は $x^2-2x-8=0$ であるための()条件である。	
⑦	$x^2-6x=0 \Rightarrow x=0$	$x=0 \Rightarrow x^2-6x=0$
	よって、 $x^2-6x=0$ は $x=0$ であるための()条件である。	
⑧	$ab=0 \Rightarrow a=0$	$a=0 \Rightarrow ab=0$
	よって、 $ab=0$ は $a=0$ であるための()条件である。	
⑨	a と b が偶数 $\Rightarrow a+b$ が偶数	$a+b$ が偶数 $\Rightarrow a$ と b が偶数
	よって、 a と b が偶数であることは $a+b$ が偶数であるための()条件である。	
⑩	$a=b \Rightarrow ac=bc$	$ac=bc \Rightarrow a=b$
	よって、 $a=b$ は $ac=bc$ であるための()条件である。	

条件 p に対して、 p でないという条件を否定といいます。

「 $x > 1$ 」の否定は「 $x \leq 1$ 」、「 $a=0$ かつ $b=0$ 」の否定は「 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ 」になります。

実数について、次の条件の否定を答えましょう。(5 点×8 問=40 点)

例	$x < 0$	$x \geq 0$
①	$x \leq -10$	
②	$x \neq 0$ かつ $x \neq 1$	
③	$x=0$ または $y=0$	
④	$x > -2$ かつ $x < 5$	
⑤	$x < 0$ または $x \geq 3$	
⑥	$-1 > x > 6$	
⑦	x は奇数	
⑧	x は無理数	

34 命題と条件④

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

$p \Rightarrow q$ に対して、 p でない $\Rightarrow$ q でないを裏といい、その逆の q でない $\Rightarrow$ p でないを対偶といいます。

$p \Rightarrow q$ と対偶は一致するので、対偶が真であることから $p \Rightarrow q$ が真であることを証明できます。

背理法…命題が成り立たないと仮定し、その仮定が矛盾することから、命題が真であることを証明する方法。

対偶を利用して、次の命題を証明しましょう。(12 点 $\times$ 3 問 = 36 点)

例 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。

対偶は、「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。」

ある整数を m とすると、偶数 n は $2m$ と表され、 $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$ で偶数になる。

よって、対偶は真なので、命題「 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。」も真である。

① n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。

② xy が偶数ならば、 x または y は偶数である。

③ $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x = 0$ かつ $y = 0$ である。

背理法を利用して、次の命題を証明しましょう。(16 点 $\times$ 4 問 = 64 点)

例 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 n が偶数ならば、 n^2 は奇数である。」

ある整数を m とすると、偶数 n は $2m$ と表され、 $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$ で偶数になる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。」は真である。

① n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。

② $x^2 > y$ 、 $x > y^2$ ならば、 $x \neq y$ である。

③ $\sqrt{3}$ が無理数ならば、 $1 + \sqrt{3}$ は無理数である。

④ $\sqrt{6}$ が無理数ならば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である。

31 命題と条件①

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

正しいか正しくないかを定めることが出来る文や式を命題(めいだい)といいます。

命題が正しいとき、その命題は真(しん)であるといい、正しくないとき、その命題は偽(ぎ)であるといいます。

次の文が命題といえるかどうか答えましょう。(3 点×5 問=15 点)

例	富士山は高い。	命題といえない。(比較の対象が分からず、真偽がはっきりしない)
①	日本の人口は 1 億人以上である。	命題といえる。(真偽がはっきりしている)
②	1 週間は 5 日である。	命題といえる。(真偽がはっきりしている)
③	数学は難しい。	命題といえない。(人によって違うので、真偽がはっきりしない)
④	円周率は π である。	命題といえる。(真偽がはっきりしている)
⑤	中学より高校の方が楽しい。	命題といえない。(人によって違うので、真偽がはっきりしない)

次の命題の真偽を調べましょう。(4 点×10 問=40 点)

例	1 は素数である。	偽…素数は 1 より大きく 1 とその数しか約数をもたない整数
①	3 は素数である。	真…3 の約数は 1, 3
②	素数は奇数である。	偽…2 は偶数で素数
③	10 は奇数である。	偽…偶数は 2 の倍数で、10 は 2×5 で偶数
④	四角形の内角の和は 360° である。	真… n 角形の内角の和は $(n-2) \times 180$ で、四角形は 360°
⑤	ひし形は平行四辺形である。	真…ひし形の対辺は平行なので、平行四辺形である
⑥	正三角形は二等辺三角形である。	真…正三角形は 3 辺が等しいので、二等辺三角形である
⑦	$(-1)^3 > 0$	偽… $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$
⑧	実数 a について、 $a^2 \geq 0$	真… $(+) \times (+) = (+)$ 、 $(-) \times (-) = (+)$ 、 $0 \times 0 = 0$
⑨	$\sqrt{25}$ は無理数である。	偽… $\sqrt{25} = 5$ なので、有理数である
⑩	正三角形 ABC で、 $\angle A = 60^\circ$	真…三角形の内角の和は 180° で、 $180 \div 3 = 60^\circ$

x に値を代入して真偽が定まるものを、 x の条件といいます。

条件に含まれる集合の要素を、その条件の全体集合といいます。

実数 x が次の値をとるとき、命題「 $x \leq 1$ 」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$x=3$	偽… $3 > 1$
①	$x=0$	真… $0 < 1$
②	$x=1$	真… $1 = 1$
③	$x = -\sqrt{3}$	真… $-\sqrt{3} < 1$

実数 x が次の値をとるとき、命題「 x は素数である」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$x=0$	偽…素数は 1 より大きく 1 とその数しか約数をもたない整数
①	$x=9$	偽…9 の約数は 1, 3, 9
②	$x=-3$	偽… $-3 < 1$
③	$x=17$	真…17 の約数は 1, 17

実数 a 、 b が次の値をとるとき、命題「 $a+b > 0$ 」の真偽を調べましょう。(5 点×3 問=15 点)

例	$a=1$ 、 $b=0$	真… $1+0 > 0$
①	$a=-1$ 、 $b=0$	偽… $-1+0 < 0$
②	$a=3$ 、 $b=-3$	偽… $3+(-3) = 0$
③	$a = -\sqrt{3}$ 、 $b = \sqrt{5}$	真… $-\sqrt{3} + \sqrt{5} > 0$

32 命題と条件②

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

p ならば q のような命題を $p \Rightarrow q$ と表し、 p を仮定、 q を結論といいます。

条件 p の要素を P 、条件 q の要素を Q とすると、 $P \subset Q$ のとき $p \Rightarrow q$ は真、 $P \supset Q$ のとき $p \Rightarrow q$ は偽です。

実数 x について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を使って調べましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$p: x \geq 4$	$q: x \geq 2$	真... $P \subset Q$
①	$p: x \geq 5$	$q: x \geq 1$	真... $P \subset Q$
②	$p: x > 1$	$q: x > 2$	偽... $P \supset Q$
③	$p: x \leq 1$	$q: x \leq 3$	真... $P \subset Q$
④	$p: x < -2$	$q: x < -4$	偽... $P \supset Q$
⑤	$p: x < 0$	$q: x < -1$	偽... $P \supset Q$

自然数 m について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を使って調べましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$p: m$ は 3 の倍数	$q: m$ は 6 の倍数	偽... $P \supset Q$
①	$p: m$ は 10 の倍数	$q: m$ は 5 の倍数	真... $P \subset Q$
②	$p: m$ は偶数	$q: m$ は 4 の倍数	偽... $P \supset Q$
③	$p: m$ は 6 の約数	$q: m$ は 18 の約数	真... $P \subset Q$
④	$p: m$ は 24 の約数	$q: m$ は 8 の約数	偽... $P \supset Q$
⑤	$p: m$ は 8 の約数	$q: m$ は 16 の約数	真... $P \subset Q$

条件を満たさない場合の例を反例(はんれい)といい、命題が偽のとき、反例を 1 つ示します。

実数 x について、次の $p \Rightarrow q$ の真偽を調べ、偽の場合の反例を 1 つ示しましょう。(4 点×5 問=20 点)

例	$x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$	偽 (反例 $x = -4$)
①	$x^2 > 25 \Rightarrow x > 5$	偽 (反例 $x = -6$)
②	$x = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$	偽 (反例 $x = -2$) ※ 因数分解すると $(x-4)(x+2) = 0$
③	$x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$	偽 (反例 $x = -5$) ※ 因数分解すると $(x-2)(x+5) = 0$
④	$ x \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$	偽 (反例 $x = -2$)
⑤	$x < 5 \Rightarrow x < 5$	偽 (反例 $x = -6$)

仮定と結論を入れかえた命題を逆といいます。命題 $p \Rightarrow q$ の逆は $q \Rightarrow p$ です。

実数について、次の命題の逆を答え、その真偽を調べましょう。(4 点×10 問=40 点)

例	$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$	逆は $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$ で真
①	$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$	逆は $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ で真
②	$x > 2 \Rightarrow x > 0$	逆は $x > 0 \Rightarrow x > 2$ で偽 (反例 $x = 1$)
③	$x = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	逆は $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ で偽 (反例 $x = 3$)
④	$x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$	逆は $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ で偽 (反例 $x = -1$)
⑤	$x = 0 \Rightarrow x = 0$	逆は $ x = 0 \Rightarrow x = 0$ で真
⑥	$x > 3 \Rightarrow x > 3$	逆は $ x > 3 \Rightarrow x > 3$ で偽 (反例 $x = -4$)
⑦	$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$	逆は $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ で偽 (反例 $a = 2, b = -2$)
⑧	$a = b \Rightarrow ac = bc$	逆は $ac = bc \Rightarrow a = b$ で偽 (反例 $a = 1, b = 2, c = 0$)
⑨	$a = 0 \Rightarrow ab = 0$	逆は $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ で偽 (反例 $a = 1, b = 0$)
⑩	$a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$	逆は $ab > 0 \Rightarrow a > 0, b > 0$ で偽 (反例 $a = -1, b = -2$)

33 命題と条件③

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

$p \Rightarrow q$ が偽で $q \Rightarrow p$ が真のとき、 p は q であるための必要条件であるといいます。

$p \Rightarrow q$ が真で $q \Rightarrow p$ が偽のとき、 p は q であるための十分条件であるといいます。

$p \Rightarrow q$ が真で $q \Rightarrow p$ も真のとき、 p は q であるための必要十分条件であるといい、 $p \Leftrightarrow q$ と表します。

実数について、次の命題とその逆の真偽を調べ、() に合う語を書きましょう。(6 点×10 問=60 点)

例	$x \geq 2 \Rightarrow x \geq 0$ 真	$x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ 偽 反例 $x=1$
	よって、 $x \geq 2$ は $x \geq 0$ であるための(十分)条件である。	
①	$x=0 \Rightarrow x^2=0$ 真	$x^2=0 \Rightarrow x=0$ 真
	よって、 $x=0$ は $x^2=0$ であるための(必要十分)条件である。	
②	$x=1 \Rightarrow x^2=1$ 真	$x^2=1 \Rightarrow x=1$ 偽 反例 $x=-1$
	よって、 $x=1$ は $x^2=1$ であるための(十分)条件である。	
③	$x=0 \Rightarrow x =0$ 真	$ x =0 \Rightarrow x=0$ 真
	よって、 $x=0$ は $ x =0$ であるための(必要十分)条件である。	
④	$x < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$ 偽 反例 $x=1$	$-1 < x < 1 \Rightarrow x < 2$ 真
	よって、 $x < 2$ は $-1 < x < 1$ であるための(必要)条件である。	
⑤	$x=3 \Rightarrow x^2-6x+9=0$ 真	$x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=3$ 真
	よって、 $x=3$ は $x^2-6x+9=0$ であるための(必要十分)条件である。	
⑥	$x=-2 \Rightarrow x^2-2x-8=0$ 真	$x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=-2$ 偽 反例 $x=4$
	よって、 $x=-2$ は $x^2-2x-8=0$ であるための(十分)条件である。	
⑦	$x^2-6x=0 \Rightarrow x=0$ 偽 反例 $x=6$	$x=0 \Rightarrow x^2-6x=0$ 真
	よって、 $x^2-6x=0$ は $x=0$ であるための(必要)条件である。	
⑧	$ab=0 \Rightarrow a=0$ 偽 反例 $a=1, b=0$	$a=0 \Rightarrow ab=0$ 真
	よって、 $ab=0$ は $a=0$ であるための(必要)条件である。	
⑨	a と b が偶数 $\Rightarrow a+b$ が偶数 真	$a+b$ が偶数 $\Rightarrow a$ と b が偶数 偽 反例 $x=1, y=1$
	よって、 a と b が偶数であることは $a+b$ が偶数であるための(十分)条件である。	
⑩	$a=b \Rightarrow ac=bc$ 真	$ac=bc \Rightarrow a=b$ 偽 反例 $a=1, b=2, c=0$
	よって、 $a=b$ は $ac=bc$ であるための(十分)条件である。	

条件 p に対して、 p でないという条件を否定といいます。

「 $x > 1$ 」の否定は「 $x \leq 1$ 」、「 $a=0$ かつ $b=0$ 」の否定は「 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ 」になります。

実数について、次の条件の否定を答えましょう。(5 点×8 問=40 点)

例	$x < 0$	$x \geq 0$
①	$x \leq -10$	$x > -10$
②	$x \neq 0$ かつ $x \neq 1$	$x=0$ または $x=1$
③	$x=0$ または $y=0$	$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$
④	$x > -2$ かつ $x < 5$	$x \leq -2$ または $x \geq 5$
⑤	$x < 0$ または $x \geq 3$	$x \geq 0$ かつ $x < 3$
⑥	$-1 > x > 6$	$x \leq -1$ または $x \geq 6$
⑦	x は奇数	x は偶数
⑧	x は無理数	x は有理数

34 命題と条件④

制限時間

30 分

開始時間

■時■分

終了時間

■時■分

合格点

80 点

$p \Rightarrow q$ に対して、 p でない $\Rightarrow$ q でないを裏といい、その逆の q でない $\Rightarrow$ p でないを対偶といいます。

$p \Rightarrow q$ と対偶は一致するので、対偶が真であることから $p \Rightarrow q$ が真であることを証明できます。

背理法…命題が成り立たないと仮定し、その仮定が矛盾することから、命題が真であることを証明する方法。

対偶を利用して、次の命題を証明しましょう。(12 点 $\times$ 3 問 = 36 点)

例 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。

対偶は、「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。」

ある整数を m とすると、偶数 n は $2m$ と表され、 $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$ で偶数になる。

よって、対偶は真なので、命題「 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。」も真である。

① n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。

対偶は、「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。」

ある整数を m とすると、奇数 n は $2m+1$ と表され、 $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ で奇数になる。

よって、対偶は真なので、命題「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。」も真である。

② xy が偶数ならば、 x または y は偶数である。

対偶は、「 x, y がともに奇数ならば、 xy は奇数である。」

ある整数を m, n とすると、 $xy = (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$ で奇数になる。

よって、対偶は真なので、命題「 xy が偶数ならば、 x または y は偶数である。」も真である。

③ $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x=0$ かつ $y=0$ である。

対偶は、「 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば、 $x^2 + y^2 \neq 0$ である。」

$x \neq 0$ のとき $x^2 + y^2 > 0$ 、 $y \neq 0$ のとき $x^2 + y^2 > 0$ になる。

よって、対偶は真なので、命題「 $x^2 + y^2 = 0$ ならば、 $x=0$ かつ $y=0$ である。」も真である。

背理法を利用して、次の命題を証明しましょう。(16 点 $\times$ 4 問 = 64 点)

例 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 n が偶数ならば、 n^2 は奇数である。」

ある整数を m とすると、偶数 n は $2m$ と表され、 $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$ で偶数になる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。」は真である。

① n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 n が奇数ならば、 n^2 は偶数である。」

ある整数を m とすると、奇数 n は $2m+1$ と表され、 $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ で奇数になる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。」は真である。

② $x^2 > y, x > y^2$ ならば、 $x \neq y$ である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 $x^2 > y, x > y^2$ ならば、 $x = y$ である。」

$x^2 > y$ に $y = x$ を代入すると $x^2 > x$ 、 $x > y^2$ に $y = x$ を代入すると $x > x^2$ になる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 $x^2 > y, x > y^2$ ならば、 $x \neq y$ である。」は真である。

③ $\sqrt{3}$ が無理数ならば、 $1 + \sqrt{3}$ は無理数である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 $\sqrt{3}$ が無理数ならば、 $1 + \sqrt{3}$ は有理数である。」

$1 + \sqrt{3} = r$ とすると、 $\sqrt{3} = r - 1$ と表され、 $\sqrt{3}$ も有理数ということになる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 $\sqrt{3}$ が無理数ならば、 $1 + \sqrt{3}$ は無理数である。」は真である。

④ $\sqrt{6}$ が無理数ならば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である。

この命題が成り立たないと仮定すると、「 $\sqrt{6}$ が無理数ならば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数である。」

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ とすると、 $r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6} + 5$ と表され、 $\sqrt{6}$ も有理数ということになる。

よって、この仮定は矛盾するので、命題「 $\sqrt{6}$ が無理数ならば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である。」は真である。